УДК 517.958:539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

С.Н. Тимергалиев

Аннотация

Исследуется разрешимость геометрически нелинейных краевых задач для упругих пологих изотропных оболочек в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко при статических граничных условиях.Метод исследования основан на сведении исходной системы уравнений равновесия к одному нелинейному уравнению относительно деформации поперечного сдвига. При этом существенную роль играют интегральные представления для тангенциальных перемещений и углов поворота, которые строятся с привлечением общих решений неоднородного уравнения Коши-Римана.

Ключевые слова: Оболочка типа Тимошенко, уравнения равновесия, краевая задача, обобщенные перемещения, обобщенное решение задачи, интегральные представления, интегральные уравнения,голоморфные функции, теорема существования.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений равновесия пологих изотропных однородных оболочек типа Тимошенко вида

$$\begin{gathered}
w_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2} = f_1, \\
\mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1} + w_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2} = f_2, \\
k^2\mu_1(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} + \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + k_3 w_{1\alpha^1} + k_4 w_{2\alpha^2} - k_5 w_3 + \\
+k_3 w_{3\alpha^1}^2/2 + k_4 w_{3\alpha^2}^2/2 + \beta_2[(T^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + R^3] = 0, \\
\psi_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 \psi_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 \psi_{2\alpha^1\alpha^2} = \widetilde{f}_1, \\
\mu_1 \psi_{2\alpha^1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 \psi_{1\alpha^1\alpha^2} = \widetilde{f}_2,
\end{gathered} \tag{1}$$

относительно обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2,\ w_3, \psi_1, \psi_2)$ в плоской области Ω, гомеоморфной срединной поверхности S_0 оболочки, при условиях на ее границе Γ:

$$\begin{gathered}
T^{j1} d\alpha^2/ds - T^{j2} d\alpha^1/ds = P^j(s), j = 1, 2, \\
T^{13} d\alpha^2/ds - T^{23} d\alpha^1/ds + T^{11} w_{3\alpha^1} d\alpha^2/ds - T^{22} w_{3\alpha^2} d\alpha^1/ds + \\
+T^{12}(w_{3\alpha^2} d\alpha^2/ds - w_{3\alpha^1} d\alpha^1/ds) = P^3(s), \\
M^{j1} d\alpha^2/ds - M^{j2} d\alpha^1/ds = N^j(s), j = 1, 2.
\end{gathered} \tag{2}$$

В (1),(2) приняты обозначения:

$$f_1 \equiv f_1(w_3) = k_3 w_{3\alpha^1} - w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^1\alpha^1} - \mu_2 w_{3\alpha^2} w_{3\alpha^1\alpha^2} - \mu_1 w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2\alpha^2} - \beta_2 R^1,$$

$$f_2 \equiv f_2(w_3) = k_4 w_{3\alpha^2} - w_{3\alpha^2} w_{3\alpha^2\alpha^2} - \mu_2 w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^1\alpha^2} - \mu_1 w_{3\alpha^2} w_{3\alpha^1\alpha^1} - \beta_2 R^2, \quad (3)$$

$$\widetilde{f}_j = k_0(w_{3\alpha^j} + \psi_j) - \beta_1 L^j, j = 1, 2;$$

$$\mu_1 = (1-\mu)/2,\ \mu_2 = (1+\mu)/2,\ k_3 = k_1 + \mu k_2,\ k_4 = k_2 + \mu k_1, k_5 = k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2,$$

$$k_0 = 6k^2(1-\mu)/h^2,\ \beta_1 = 12(1-\mu^2)/(h^3 E), \beta_2 = (1-\mu^2)/(Eh);$$

$R^j, P^j (j = \overline{1,3}), L^k, N^k (k = 1, 2)$- внешние силы, действующие на оболочку; T^{ij}- усислия, M^{ij}-моменты:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}(a) = D_0^{ijkn}\gamma_{kn}^0,\ \ M^{ij} \equiv M^{ij}(a) = D_2^{ijkn}\gamma_{kn}^1,\ \ D_m^{ijkn} = \int_{-h/2}^{h/2} B^{ijkn}(\alpha^3)^m d\alpha^3;$$

γ_{ij}^k- компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки:

$$\gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - k_j w_3 + w_{3\alpha^j}^2/2, j = 1, 2,\ \gamma_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \gamma_{jj}^1 = \psi_{j\alpha^j}, j = 1, 2,$$

$$\gamma_{12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \gamma_{j3}^0 = w_{3\alpha^j} + \psi_j, j = 1, 2, \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1 \equiv 0, k = \overline{1,3};$$

w_i и w_3-тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0 ; $\psi_i (i = 1, 2)$- углы поворота нормальных сечений; B^{ijkn} -упругие характеристики оболочки: $B^{1111} = B^{2222} = E/(1-\mu^2), B^{1122} = \mu E/(1-\mu^2), B^{1212} = E/(2(1+\mu)), B^{1313} = B^{2323} = Ek^2/(2(1+\mu))$; остальные $B^{ijkn} = 0; \mu = const-$ коэффициент Пуассона, $E = const-$ модуль Юнга, $k_1, k_2 = const-$ главные кривизны; $k^2 = const$- коэффициент сдвига; $h = const$- толщина оболочки; α^1, α^2- декартовы координаты точек области Ω.

Задача (1),(2). *Требуется найти решение системы (1),удовлетворяющее граничным условиям (2).*

Краевую задачу (1),(2) будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия:(a) внешние силы $R^j (j = \overline{1,3}), L^k (k = 1, 2) \in L_p(\Omega), P^j (j = \overline{1,3}), N^k (k = 1, 2) \in C_\beta(\Gamma)$; здесь и далее везде: $p > 2,\ 0 < \beta < 1$; (b) Ω-односвязная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma \in C_\beta^1$; (c) внешняя нагрузка самоуравновешена.

Определение. *Обобщенным решением задачи равновесия (1),(2) назовем вектор обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega), p > 2$, почти всюду удовлетворяющий системе (1) и поточечно граничным условиям(2).*

Здесь $W_p^{(2)}(\Omega)$ - пространство Соболева.В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщенное решение $a \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$. Здесь и далее везде $\alpha = (p-2)/p$.

2. Решение задачи (1),(2) относительно тангенциальных перемещений и углов поворота

Рассмотрим первые два уравнения в (1), в которых w_3 временно считаем фиксированным. При помощи комплексной функции $\omega = w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2} + i\mu_1(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2})$ их можно представить в виде

$$\omega_{\overline{z}} = f, \quad (4)$$

где $f = (f_1 + if_2)/2,\ \omega_{\overline{z}} = (\omega_{\alpha^1} + i\omega_{\alpha^2})/2,\ z = \alpha^1 + i\alpha^2$.

(4) есть неоднородное уравнение Коши-Римана. Его общее решение имеет вид[1,c.29]:

$$\omega(z) = \Phi_1(z) + Tf(z),\ \ Tf \equiv T_\Omega f = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta, \quad (5)$$

где $\Phi_1(z)$ - произвольная голоморфная функция, принадлежащая пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [1,стр.39], что Tf - вполне непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ при $p>2$ и из $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$ в $C^{k+1}_\alpha(\overline{\Omega})$. Кроме того, существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \overline{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv S_\Omega f \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta, \tag{6}$$

где Sf - линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$ и $\|Sf\|_{L_p} \leq \Lambda_p\|f\|_{L_p}, p>1$.

Соотношение (5) в свою очередь при помощи функции $\omega_0(z)=w_2+iw_1$ можно записать в виде

$$\omega_{0\overline{z}} = i(d_1\omega + d_2\overline{\omega}) \equiv id[\omega], \quad d_j = (\mu_1+(-1)^j)/(4\mu_1), j=1,2. \tag{7}$$

(7) также представляет собой неоднородное уравнение Коши-Римана, общее решение которого дается формулой

$$\omega_0(z) = \Phi_2(z) + iTd[\Phi_1+Tf](z), \tag{8}$$

где Φ_2 - произвольная голоморфная функция класса $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$.

Таким образом, общее решение первых двух уравнений в (1) при фиксированных w_3 имеет вид (8) и содержит две произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z), j=1,2$. Их найдем так, чтобы тангенциальные перемещения w_1, w_2 удовлетворяли первым двум граничным условиям в (2). С этой целью граничные условия при помощи соотношений в (3) запишем в виде

$$(w_{1\alpha^1}+\mu w_{2\alpha^2})(t)d\alpha^2/ds - \mu_1(w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1})(t)d\alpha^1/ds = \varphi_1(w_3)(t), \tag{9}$$

$$\mu_1(w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1})(t)d\alpha^2/ds - (\mu w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2})(t)d\alpha^1/ds = \varphi_2(w_3)(t),$$

$$t = t(s) = \alpha^1(s) + i\alpha^2(s) \in \Gamma,$$

где приняты обозначения: $\varphi_j(w_3) = \beta_2 P^j(s) + [(-\mu)^{j-1}(k_1w_3 - w^2_{3\alpha^1}/2)(t) -$

$$-(-\mu)^{2-j}(k_2w_3 - w^2_{3\alpha^2}/2)(t)]d\alpha^{3-j}/ds + (-1)^{j-1}\mu_1 w_{3\alpha^1}(t)w_{3\alpha^2}(t)d\alpha^j/ds, j=1,2. \tag{10}$$

Далее считаем, что область Ω- единичный круг: $|z|\leq 1$. Выражения тангенциальных перемещений w_1, w_2 из (8) вносим в (9). Так как

$$w_{j\alpha^j} = Re\{\Phi_1(z)+Tf(z)\}/2 - (-1)^j Im\{\Phi'_2(z) + iSd[\Phi_1+Tf](z)\}, j=1,2, \tag{11}$$

$$w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1} = 2Re\{\Phi'_2(z)+iSd[\Phi_1+Tf](z)\},$$

которые получаются с использованием (4),(5),(8), то граничные условия (9) примут вид:

$$Re\{(-i)^{2-j}t\Phi'_2(t)\} + Re\{i^{j-1}tSd[\Phi_1]^+(t)\} + (-1)^{j-1}\mu_3 d\alpha^{3-j}/ds\ Re\Phi_1(t) = l_j(w_3)(t), \tag{12}$$

$$t\in\Gamma, j=1,2,$$

где

$$l_j(w_3)(t) = \varphi_j(w_3)(t)/(1-\mu) + H_jf(t), \tag{13}$$

$H_jf = (-1)^j Im\{i^{2-j}tSd[Tf]^+(t)\} + (-1)^j\mu_3 d\alpha^{3-j}/ds\ ReTf(t),\ j=1,2,\ \mu_3 = (1+\mu)/(2(1-\mu))$;

символ $\Psi^+(t)$ означает предел функции $\Psi(z)$ при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω.

Голоморфные функции $\Phi_j(z), j=1,2$ будем искать в виде

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho_1(\tau)}{\tau(\tau-z)}d\tau,\quad \Phi_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma ln(1-z/\tau)\frac{\rho_2(\tau)}{\tau}d\tau+c_1+ic_2,\quad (14)$$

где $\rho_j(\tau)\in C_\alpha(\Gamma)$-действительные функции; под $ln(1-z/\tau)$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Для производной $\Phi_2'(z)$ имеем представление

$$\Phi_2'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho_2(\tau)}{\tau(\tau-z)}d\tau. \quad (15)$$

В соответствии с формулами Сохоцкого [2,с.42] получаем

$$\Phi_1^+(t)=\frac{1}{2}\frac{\rho_1(t)}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho_1(\tau)}{\tau(\tau-t)}d\tau,\quad \Phi_2'^+(t)=\frac{1}{2}\frac{\rho_2(t)}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho_2(\tau)}{\tau(\tau-t)}d\tau. \quad (16)$$

Используя (16), формулы (4.7), (8.8a) из [1,с.28,55], для $Sd[\Phi_1]^+(t)$ будем иметь соотношение:

$$Sd[\Phi_1]^+(t)=\frac{d_1}{2t^2}\frac{\rho_1(t)}{t}+\frac{d_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{t}}{\tau-t}\frac{\rho_1(\tau)}{\tau^2}d\tau, \quad (17)$$

где постоянная d_1 определена в (7).

Теперь, если (16), (17) подставить в (12),то для определения $\rho_j(t), j=1,2$ придем к системе линейных интегральных уравнений вида

$$\mu_3\rho_1(t)+\frac{d_1}{\pi i}\int_\Gamma(\tau-\overline{\tau}^2\overline{t}-t)\rho_1(\tau)d\tau-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{\rho_2(\tau)}{\tau}d\tau=4l_1(w_3)(t),$$

$$\rho_2(t)+\frac{d_1}{2\pi}\int_\Gamma(t-\overline{\tau}^2\overline{t})\rho_1(\tau)d\tau+\frac{d_1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{\rho_1(\tau)}{\tau}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{\tau}\rho_2(\tau)d\tau=2l_2(w_3)(t).$$
(18)

Займемся решением системы (18). Выражение $\rho_2(t)$ из второго уравнения в (18) подставим в первое уравнение. С учетом $\mu_3=-2d_1$ получим

$$d_1\rho_1(t)+\frac{d_1}{2\pi i}(a_0t-a_1+a_2\overline{t})=-l_1(w_3)(t)-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{l_2(w_3)(\tau)}{\tau}d\tau, \quad (19)$$

где $a_j=\int_\Gamma \overline{t}^j\rho_1(t)dt, j=0,1,2.$

Уравнение (19) последовательно умножаем на $1,\overline{t},\overline{t}^2$, второе уравнение в (18) - на $\overline{t}$ и интегрируем по Γ. В результате с учетом $\overline{a}_2=-a_0$ при выполнении условий

$$Re\int_\Gamma\frac{l_1(w_3)(t)+il_2(w_3)(t)}{t^2}dt=0,\quad \int_\Gamma\frac{l_j(w_3)(t)}{t}dt=0,\ j=1,2 \quad (20)$$

решение системы (18) получаем в виде

$$\rho_1(t)=[a_1+(\overline{t}-t)a_0]/(2\pi i)+L_1(w_3)(t),\quad \rho_2(t)=b_1/(2\pi i)+L_2(w_3)(t), t\in\Gamma, \quad (21)$$

где

$$L_1(w_3)(t)=\frac{1}{d_1}\{\frac{\overline{t}}{2\pi i}\int_\Gamma[l_1(w_3)(\tau)-il_2(w_3)(\tau)]d\tau-l_1(w_3)(t)-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\tau+t}{\tau(\tau-t)}l_2(w_3)(\tau)d\tau\},$$

$$L_2(w_3)(t)=2l_2(w_3)(t)-\frac{\overline{t}}{2\pi}\int_\Gamma[l_1(w_3)(\tau)-il_2(w_3)(\tau)]d\tau-\frac{d_1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\tau+t}{\tau(\tau-t)}L_1(w_3)(\tau)d\tau,$$
(22)

b_1 -произвольная постоянная.

Теперь, если (21) подставить в (14),(15), при этом учесть $\Phi_1(0) = -\overline{a}_0/(2\pi i)$, то для голоморфных функций $\Phi_j(z), \Phi_2'(z)$ получим следующие представления:

$$\Phi_1(z) = \Phi_1[l(w_3)](z) + ic_0, \quad \Phi_2'(z) \equiv \Phi_2'[l(w_3)](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{L_2(w_3)(\tau)}{\tau(\tau - z)}d\tau,$$

$$\Phi_2(z) = \Phi_2[l(w_3)](z) + c_1 + ic_2, \tag{23}$$

где

$$\Phi_1[l(w_3)](z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\tau + z}{\tau^2(\tau - z)}L_1(w_3)(\tau)d\tau, \ \ \Phi_2[l(w_3)](z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ln(1 - \frac{z}{\tau})L_2(w_3)(\tau)\frac{d\tau}{\tau}; \tag{24}$$

$c_j (j = 0, 1, 2)$ -произвольные действительные постоянные.

Подставляя (23) в (8), для тангенциальных перемещений w_1, w_2, удовлетворяющих первым двум уравнениям в (1) и граничным условиям (9), при выполнении условий (20) получаем представление

$$\omega_0(z) = H_0 w_3 + c_0\overline{z}/(1 - \mu) + c_1 + ic_2, \tag{25}$$

$$H_0 w_3 \equiv H_0[l(w_3); f(w_3)] = \Phi_2[l(w_3)](z) + iTd[\Phi_1[l(w_3)] + Tf(w_3)](z).$$

Получим интегральные представления для производных (до второго порядка включительно) w_1, w_2. Используя выражение (4) функции ω и соотношения в (11), находим

$$w_{j\alpha^j} = Re\{\Phi_1[l(w_3)] + Tf(w_3)\}/2 - (-1)^j Im\{\Phi_2'[l(w_3)] + iSd[\Phi_1[l(w_3)] +$$

$$+Tf(w_3)]\} \equiv H_{jj}[l(w_3); f(w_3)] \equiv H_{jj}w_3, \tag{26}$$

$$w_{j\alpha^k} = Re\{\Phi_2'[l(w_3)] + iSd[\Phi_1[l(w_3)] + Tf(w_3)]\} + (-1)^j Im\{\Phi_1[l(w_3)] + Tf(w_3)\}/(2\mu_1) +$$

$$+(-1)^j c_0/(1 - \mu) \equiv H_{jk}[l(w_3); f(w_3)] + (-1)^j c_0/(1 - \mu);$$

$$H_{jk}[l(w_3); f(w_3)] \equiv H_{jk}w_3 \ (j \neq k), j, k = 1, 2.$$

Дифференцируя соотношение (7) по $z, \overline{z}$, получаем

$$\omega_{0\overline{z}z} = i\{d_1\{\Phi_1'[l(w_3)] + Sf(w_3)\} + d_2\overline{f(w_3)}\} \equiv P_1[l(w_3); f(w_3)] \equiv P_1 w_3, \tag{27}$$

$$\omega_{0\overline{z}\overline{z}} = i\{d_1 f(w_3) + d_2\{\overline{\Phi_1'[l(w_3)]} + \overline{Sf(w_3)}\}\} \equiv P_2[l(w_3); f(w_3)] \equiv P_2 w_3.$$

Теперь соотношение (8) дифференцируем дважды по z. Принимая во внимание легко получаемое соотношение

$$Sd[\Phi_1 + Tf](z) = T_\Gamma(d[\Phi_1 + Tf]/t^2) + T(\partial d[\Phi_1 + Tf]/\partial\zeta), \tag{28}$$

будем иметь:

$$\omega_{0zz} = \Phi_2''[l(w_3)] + iS_\Gamma\{d[\Phi_1[l(w_3)] + Tf(w_3)]/t^2\} +$$

$$+iS\{d_1[\Phi_1'[l(w_3)] + Sf(w_3)] + d_2\overline{f(w_3)}\} \equiv P_3[l(w_3); f(w_3)] \equiv P_3 w_3. \tag{29}$$

В (28), (29) приняты обозначения:

$$\Phi_1'[l(w_3)](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{L_1(w_3)(t)}{(t - z)^2}\frac{dt}{t}, \quad \Phi_2''[l(w_3)](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{L_2(w_3)(t)}{(t - z)^2}\frac{dt}{t},$$

$$T_\Gamma g = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad S_\Gamma g(z) \equiv \frac{\partial T_\Gamma g(z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{(\tau - z)^2}d\tau. \tag{30}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (a),(b) раздела 1. Тогда 1)* $P_j(j = \overline{1,3})$ *суть нелинейные ограниченные операторы из* $W_p^{(2)}(\Omega)$ *в* $L_p(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$; 2)$H_{jk}(j,k = 1,2)$ *и* H_0 *суть нелинейные вполне непрерывные операторы из* $W_p^{(2)}(\Omega)$ *в* $C_{\beta_0}(\overline{\Omega})$ *и* $C^1_{\beta_0}(\overline{\Omega})$ *соответственно (здесь и далее* $\beta_0 = \min(\alpha,\beta)$ *). При этом для любых* $w_3^j(j = 1,2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ *имеют место оценки*

$$\|P_j w_3^1 - P_j w_3^2\|_{L_p(\Omega)}, \|H_{jk}w_3^1 - H_{jk}w_3^2\|_{C_{\beta_0}(\overline{\Omega})}, \|H_0 w_3^1 - H_0 w_3^2\|_{C^1_{\beta_0}(\overline{\Omega})} \le$$

$$\le c(1 + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}} + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}})\|w_3^1 - w_3^2\|_{W_p^{(2)}}.$$

Справедливость леммы устанавливается с использованием соотношений (3), (6), (10), (13), (22),(25), (26)-(30) и формулы (6.10) из[1,с.42].

Вернемся к условиям (20). Если принять во внимание соотношения (13),(3), (10), то после несложных, но громоздких вычислений условия (20) можно представить в виде

$$\int_\Gamma P^j(s)ds + \int_\Omega\int R^j d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1,2, \tag{31}$$

$$\int_\Gamma (\alpha^1 P^2 - \alpha^2 P^1)ds + \int_\Omega\int (\alpha^1 R^2 - \alpha^2 R^1)d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,$$

где $P^j(s)$, R^j - компоненты внешней нагрузки.

Переходим к нахождению функций $\psi_k(k = 1,2)$ из последних двух уравнений в (1), удовлетворяющих последним двум граничным условиям в (2). С учетом выражений для моментов M^{jk} в (3) граничные условия запишем в виде

$$(\psi_{1\alpha^1} + \mu\psi_{2\alpha^2})(t)d\alpha^2/ds - \mu_1(\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1})(t)d\alpha^1/ds = \widetilde{\varphi}_1(t), \tag{32}$$

$$\mu_1(\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1})(t)d\alpha^2/ds - (\mu\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2})(t)d\alpha^1/ds = \widetilde{\varphi}_2(t),$$

$$\widetilde{\varphi}_j(t) = \beta_1 N^j(s), j = 1,2,$$

где функции $N^j(s)$ и постоянная β_1 определены в (3).

Заметим, что структура левых частей последних двух уравнений в (1) и граничных условий (32) такая же, как и в случае тангенциальных перемещений; они отличаются только правыми частями. Поэтому для углов поворота ψ_1, ψ_2 при фиксированных правых частях сразу получаем аналогичные представления:

$$\psi = \psi_2 + i\psi_1 = H_0[\widetilde{l}(v); \widetilde{f}(v)] + \psi_*(z), \tag{33}$$

где приняты обозначения:

$$\psi_*(z) = \psi_{2*}(z) + i\psi_{1*}(z) = c_3\overline{z}/(1-\mu) + c_4 + ic_5, z = \alpha^1 + i\alpha^2,$$

$$v = v_2 + iv_1, \quad \widetilde{f}(v) = [\widetilde{f}_1(v) + i\widetilde{f}_2(v)]/2, \ \widetilde{l}(v) = \widetilde{l}_1(v) + i\widetilde{l}_2(v), \tag{34}$$

$$v_j = w_{3\alpha^j} + \psi_j, \quad \widetilde{f}_j(v) = k_0 v_j - \beta_1 L^j, \ \widetilde{l}_j(v)(t) = \widetilde{\varphi}_j(t)/(1-\mu) + H_j\widetilde{f}(v)(t), j = 1,2;$$

$c_j(j = \overline{3,5})$ - произвольные действительные постоянные; операторы $H_0[\widetilde{l}(v); \widetilde{f}(v)]$, $H_j\widetilde{f}(v)$ определены с помощью (25), (24),(13). Заметим, что функции $v_j(j = 1,2)$ представляют собой компоненты деформации поперечных сдвигов.

При этом должны выполняться условия разрешимости

$$\int_\Gamma \frac{\widetilde{l}_j(v)}{t}dt = 0,\ j = 1,2,\quad Re\int_\Gamma \frac{\widetilde{l}(v)(t)}{t^2}dt = 0,$$

которые, поступая как и выше,можно привести к виду

$$\beta_1(\int_\Gamma N^j(s)ds + \int_\Omega\int L^j d\alpha^1 d\alpha^2) - k_0\int_\Omega\int v_j d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,\quad j = 1,2, \tag{35}$$

$$\beta_1[\int_\Gamma(\alpha^1 N^2 - \alpha^2 N^1)ds + \int_\Omega\int(\alpha^1 L^2 - \alpha^2 L^1)d\alpha^1 d\alpha^2] - k_0\int_\Omega\int(\alpha^1 v_2 - \alpha^2 v_1)d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,$$

где N^j, L^j -компоненты внешней нагрузки; $v_j (j = 1,2) \in W_p^{(1)}(\Omega), p > 2$ - функции, введенные в (34), которые временно считаем фиксированными.

Для производных $\psi_{j\alpha^k}(j,k = 1,2)$ также получаем представления, аналогичные (26):

$$\psi_{j\alpha^k} = H_{jk}[\widetilde{l}(v);\widetilde{f}(v)] + \psi_{j*\alpha^k},\quad \psi_{j*\alpha^k} = (-1)^j[1-(-1)^{j-k}]c_3/(2(1-\mu)),\ j,k = 1,2; \tag{36}$$

операторы H_{jk} введены в (26).

Имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a), (b) раздела 1. Тогда $H_{jk}(j,k = 1,2)$ и H_0 относительно v суть линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(1)}(\Omega)$ в $C_{\beta_0}(\overline{\Omega})$ и $C^1_{\beta_0}(\overline{\Omega})$ соответственно.*

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из (25), (26) с учетом выражений $\widetilde{l}(v), \widetilde{f}(v)$ в (34) и вышеуказанных свойств операторов T, S.

Таким образом, при выполнении условий (31),(35) задача (1), (2) при фиксированных $w_3, v_j (j = 1,2)$ разрешима относительно тангенциальных перемещений и углов поворота; ее решения даются формулами (25), (33).

В заключение раздела соотношения (33), (36) представим в удобном для дальнейших исследований виде. В первую очередь для $\widetilde{f}(v), \widetilde{l}(v)$ из (34) получаем

$$\widetilde{f}(v) = \widetilde{f}^0 + \widetilde{f}^1(v),\ \ \widetilde{l}(v) = \widetilde{l}^0 + \widetilde{l}^1(v), \widetilde{f}^k = (\widetilde{f}_{1k} + i\widetilde{f}_{2k})/2,\ \widetilde{l}^k = \widetilde{l}_{1k} + i\widetilde{l}_{2k},\ k = 0,1; \tag{37}$$

$$\widetilde{f}_{j0} = -\beta_1 L^j,\ \widetilde{f}_{j1} = k_0 v_j,\ \widetilde{l}_{j0} = \widetilde{\varphi}_j/(1-\mu) + H_j\widetilde{f}^0,\ \widetilde{l}_{j1}(v) = H_j\widetilde{f}^1(v),\ j = 1,2.$$

Заметим, что $\widetilde{f}^j(v),\ \widetilde{l}^j(v)$-однородные операторы относительно v порядка j.

Теперь, если (37) подставить в (33), (36), то придем к искомым представлениям для углов поворота и их производных:

$$\psi \equiv \psi(v) = \psi^0 + \psi^1(v) + \psi_*,\quad \psi_{j\alpha^k} \equiv \psi_{j\alpha^k}(v) = \psi_{j0\alpha^k} + \psi_{j1\alpha^k}(v) + \psi_{j*\alpha^k},\ j,k = 1,2; \tag{38}$$

$$\psi^n(v) = \psi_{2n}(v) + i\psi_{1n}(v) = H_0[\widetilde{l}^n(v);\widetilde{f}^n(v)],\ \ \psi_{jn\alpha^k}(v) = H_{jk}[\widetilde{l}^n(v);\widetilde{f}^n(v)],\ j,k = 1,2; n = 0,1.$$

Легко видеть, что $\psi^n(v),\ \psi_{jn\alpha^k}(v)$- однородные операторы относительно v порядка n.

3. Сведение системы (1) к одному уравнению и его исследование

Прежде чем перейти к третьему уравнению в (1), прогиб w_3 и его производные выразим через $v_j (j = 1,2)$. Непосредственно из формул для v_j в (34) с учетом (38) получим

$$w_{3\alpha^j} \equiv w_{3\alpha^j}(v) = w_{30\alpha^j} + w_{31\alpha^j}(v) + w_{3*\alpha^j}, \tag{39}$$

$$w_{30\alpha^j} = -\psi_{j0},\ w_{31\alpha^j}(v) = v_j - \psi_{j1}(v),\ w_{3*\alpha^j} = -\psi_{j*},\ j = 1, 2.$$

Используя (39), легко выводим представление для w_3:

$$w_3 \equiv w_3(v) = w_{30} + w_{31}(v) + w_{3*}, \tag{40}$$

в котором

$$w_{30} = -\int_{(0,0)}^{(\alpha^1,\alpha^2)} \psi_{10}d\alpha^1 + \psi_{20}d\alpha^2,\ w_{31}(v) = \int_{(0,0)}^{(\alpha^1,\alpha^2)} [v_1 - \psi_{11}(v)]d\alpha^1 + [v_2 - \psi_{21}(v)]d\alpha^2,$$

$$w_{3*} = -c_5\alpha^1 - c_4\alpha^2 + c_6. \tag{41}$$

Необходимо отметить, что криволинейные интегралы в (41) не зависят от пути интегрирования и это обстоятельство приводит к тому, что постоянная $c_3 = 0$, что и учтено при выводе выражения w_{3*}. В силу этого формула для $\psi_*(z)$ в (34) примет более простой вид:

$$\psi_*(z) = \psi_{2*}(z) + i\psi_{1*}(z) = c_4 + ic_5. \tag{42}$$

Для производных второго порядка прогиба w_3 будем иметь:

$$w_{3\alpha^j\alpha^k} \equiv w_{3\alpha^j\alpha^k}(v) = w_{30\alpha^j\alpha^k} + w_{31\alpha^j\alpha^k}(v), \tag{43}$$

$$w_{30\alpha^j\alpha^k} = -\psi_{j0\alpha^k},\ w_{31\alpha^j\alpha^k}(v) = v_{j\alpha^k} - \psi_{j1\alpha^k}(v),\ j, k = 1, 2,$$

где $\psi_{j0\alpha^k}$, $\psi_{j1\alpha^k}(v)$ определены в (38).

Заметим, что $w_{3n}(v)$, $w_{3n\alpha^j}(v)$, $w_{3n\alpha^j\alpha^k}(v)$ относительно v суть однородные операторы порядка n.

Подставляя (39), (40), (43) сначала в (3), (10), затем (3), (10) - в (13), (25), (26), для тангенциальных перемещений и их производных также получаем разбиения на линейные и нелинейные операторы:

$$\omega_0 \equiv \omega_0(v) = \omega_{01}(v) + \omega_{02}(v) + \omega_{0*},\ \ w_{j\alpha^k} \equiv w_{j\alpha^k}(v) = w_{j1\alpha^k}(v) + w_{j2\alpha^k}(v) + w_{j*\alpha^k}, j = 1, 2, \tag{44}$$

где

$$\omega_{0j}(v) = w_{2j}(v) + iw_{1j}(v) = H_0[l^j(v); f^j(v)],\ w_{jn\alpha^k}(v) = H_{jk}[l^n(v); f^n(v)],\ j, n, k = 1, 2;$$

$$\omega_{0*} = w_{2*} + iw_{1*} = H_0[l^*; f^*] + c_0\overline{z} + c_1 + ic_2,\ w_{j*\alpha^k} = H_{jk}[l^*; f^*] + (-1)^j[1 - (-1)^{j-k}]c_0/2;$$

$$l^j(v) = l_{1j}(v) + il_{2j}(v),\ f^j(v) = [f_{1j}(v) + if_{2j}(v)]/2,\ j = 1, 2;\ l^* = l_{1*} + il_{2*},\ f^* = (f_{1*} + if_{2*})/2;$$

$$f_{j1}(v) = k_{2+j}w_{31\alpha^j}(v),\ \ f_{j2}(v) = k_{2+j}w_{30\alpha^j} - \beta_2 R^j - w_{3\alpha^j}(v)w_{3\alpha^j\alpha^j}(v) - \mu_2 w_{3\alpha^{3-j}}(v)w_{3\alpha^1\alpha^2}(v) -$$
$$-\mu_1 w_{3\alpha^j}(v)w_{3\alpha^{3-j}\alpha^{3-j}}(v),\ \ \ f_{j*} = k_{2+j}w_{3*\alpha^j},\ j = 1, 2; \tag{45}$$

$$l_{jk}(v) = \varphi_{jk}(v)/(1-\mu) + H_j f^k(v),\ l_{j*} = \varphi_{j*}/(1-\mu) + H_j f^*,\ \varphi_{j1}(v) = (-1)^{j-1}k_{2+j}w_{31}(v);$$

$$\varphi_{j2}(v) = \beta_2 P^j(s) + (-1)^j\{k_{2+j}w_{30} - \mu^{(-1)^{k-1}(j-k)}[(w_{30\alpha^k} + w_{31\alpha^k})^2 + 2w_{3*\alpha^k}(w_{30\alpha^k} +$$
$$+ w_{31\alpha^k})]/2\}d\alpha^{3-j}/ds + (-1)^{j-1}\mu_1[w_{3\alpha^1}(w_{30\alpha^2} + w_{31\alpha^2}) + w_{3*\alpha^2}(w_{30\alpha^1} + w_{31\alpha^1})]d\alpha^j/ds$$

(по k суммирование от 1 до 2), $\varphi_{j*} = [(-\mu)^{j-1}(k_1 w_{3*} - w_{3*\alpha^1}^2)/2 - (-\mu)^{j-2}(k_2 w_{3*} -$

$$-w_{3*\alpha^2}^2)/2]d\alpha^{3-j}/ds + (-1)^{j-1}\mu_1 w_{3*\alpha^1}w_{3*\alpha^2}d\alpha^j/ds,\ \ \ j = 1, 2;$$

операторы H_0, $H_{jk}(j, k = 1, 2)$, $H_j(j = 1, 2)$ введены в (25), (26), (13).

При помощи несложных, но громоздких вычислений можно получить явное выражение для ω_{0*}:

$$\omega_{0*} = w_{2*}+iw_{1*} = (k_2-k_1)(c_4+ic_5)z^2/8+[2d_2\overline{b_1}-id_1(k_3c_5+ik_4c_4)]\overline{z}^2/4+[b_1d_1+ \quad (46)$$

$$+id_2(k_3c_5-ik_4c_4)/2](1-z\overline{z})-[c_4c_5-ic_6(k_1-k_2)+i(c_5^2-c_4^2)/2]z/2+(ib_2/2+c_0)\overline{z}+c_1+ic_2,$$

где $b_1 = (k_1+k_2)(c_4+ic_5)-(k_4c_4+ik_3c_5)/2$, $b_2 = c_6(k_1+k_2)-(c_5^2+c_4^2)/2$, $z = \alpha^1+i\alpha^2$; постоянные k_3, k_4, d_1, d_2 определены в (3), (7).

Из (46), выделяя действительную и мнимую части , будем иметь:

$$w_{j*} = (-1)^{j-1}c_{6-j}[k_2(\alpha^2)^2 - k_1(\alpha^1)^2]/2 - k_jc_{3+j}\alpha^1\alpha^2 + (k_jc_6 - c_{6-j}^2/2)\alpha^j+$$

$$+(-1)^j(c_0 + (-1)^{j-1}c_4c_5/2)\alpha^{3-j} + (-1)^{j-1}c_{6-j}(k_1 - k_2)/4 + c_{3-j}, \quad j = 1, 2. \quad (47)$$

Непосредственные вычисления показывают, что $w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}$, определенные формулами (41), (42), (47), являются жесткими смещениями оболочки как абсолютно твердого тела, т.е. обращают в нуль компоненты деформации.

Переходим к третьему уравнению в (1). Заменяя обобщенные перемещения выражениями из (38)-(40), (43),(44), третье уравнение приводим к эквивалентной системе относительно $v_j(j = 1, 2)$:

$$v_{1\alpha^1} + v_{2\alpha^2} = f_3(v), \quad v_{1\alpha^2} - v_{2\alpha^1} = \psi_{1\alpha^2}(v) - \psi_{2\alpha^1}(v),$$

которую при помощи комплексной функции $v = v_2 + iv_1$ запишем в комплексной форме

$$\partial v/\partial\overline{z} = [\psi_{2\alpha^1}(v) - \psi_{1\alpha^2}(v) + if_3(v)]/2 \equiv f_0(v), \quad (48)$$

где

$$f_3(v) \equiv f_3(w_3(v)) = -\{k_3w_{1\alpha^1}(v)+k_4w_{2\alpha^2}(v)-k_5w_3(v)+k_3w_{3\alpha^1}^2(v)/2+k_4w_{3\alpha^2}^2(v)/2+$$

$$+\beta_2[T^{\lambda\mu}(v)w_{3\alpha^\lambda}(v)]_{\alpha^\mu} + \beta_2R^3\}/(k^2\mu_1), \quad T^{\lambda\mu}(v) \equiv T^{\lambda\mu}(a(v))(\lambda, \mu = 1, 2). \quad (49)$$

Третье граничное условие в (2) преобразуется к виду

$$v_1d\alpha^2/ds - v_2d\alpha^1/ds = \varphi(v), \quad (50)$$

где

$$\varphi(v) \equiv \varphi(w_3(v)) = \beta_3[P^3(s) - T^{11}(v)w_{3\alpha^1}(v)d\alpha^2/ds + T^{22}(v)w_{3\alpha^2}(v)d\alpha^1/ds-$$

$$-T^{12}(v)(w_{3\alpha^2}(v)d\alpha^2/ds - w_{3\alpha^1}(v)d\alpha^1/ds)], \quad \beta_3 = 2(1 + \mu)/(k^2Eh). \quad (51)$$

Итак, исходная задача (1),(2) свелась к нахождению решения уравнения (48), удовлетворяющего граничному условию (50).

Уравнение (48) эквивалентно

$$v = \Phi(z) + Tf_0(v)(z), \quad (52)$$

где $\Phi(z)$ -произвольная голоморфная функция класса $C_\alpha(\overline{\Omega})$; оператор T введен в (5).

Голоморфную функцию $\Phi(z)$ найдем так, чтобы функция v, представленная в виде (52), удовлетворяла граничному условию (50), при этом $\varphi(v)$, $f_0(v)$ в правых частях (50), (52) временно считаем фиксированными. Внося (52) в (50), для

$\Phi(z)$ получаем задачу Римана- Гильберта в единичном круге с краевым условием $Re[(-i)t\Phi(t)] = l_3(v)(t),\ t \in \Gamma$, решение которой дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{z^{-1}}{2\pi} \int_\Gamma l_3(v)(t) \frac{t+z}{(t-z)t} dt, \tag{53}$$

при этом должно выполняться условие

$$\int_\Gamma \frac{l_3(v)(t)}{t} dt = 0, \quad l_3(v)(t) = \varphi(v)(t) + Re[itTf_0(v)(t)]. \tag{54}$$

С учетом условия (54) решение (53) можно представить в виде

$$\Phi(z) \equiv \Phi[l_3(v)](z) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{l_3(v)(t)}{t-z} \frac{dt}{t}. \tag{55}$$

Условие (54) можно преобразовать к виду

$$\int_\Gamma (k_1\alpha^1 P^1 + k_2\alpha^2 P^2 + P^3) ds + \int_\Omega \int (k_1\alpha^1 R^1 + k_2 \alpha^2 R^2 + R^3) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \tag{56}$$

Таким образом, при выполнении условия (56) решение $\Phi(z)$ задачи Римана-Гильберта дается формулой (55). Подставляя (55) в (52), для определения $v \in W_p^{(1)}(\Omega), p > 2$ получаем уравнение вида

$$v - \Phi[l_3(v)] - Tf_0(v) = 0. \tag{57}$$

Уравнение (57) представим несколько в другом виде. Принимая во внимание соотношения (38), (40), (43), (44) и легко проверяемое равенство $k_3 w_{1*\alpha^1} + k_4 w_{2*\alpha^2} - k_5 w_{3*} + k_3 w^2_{3*\alpha^1}/2 + k_4 w^2_{3*\alpha^2}/2 = 0$, для $f_3(v),\ f_0(v),\ l_3(v)$ в (49), (48), (54) получаем разбиения на линейные и нелинейные слагаемые:

$$f_3(v) = f_{31}(v) + f_{32}(v),\ f_0(v) = f_{01}(v) + f_{02}(v),\ l_3(v) = l_{31}(v) + l_{32}(v), \tag{58}$$

где

$$f_{31}(v) = -[k_3 w_{11\alpha^1}(v) + k_4 w_{21\alpha^2}(v) - k_5 w_{31}(v)]/(k^2\mu_1),$$
$$f_{32}(v) = -\{k_3 w_{12\alpha^1}(v) + k_4 w_{22\alpha^2}(v) + k_{2+\lambda}[(w_{30\alpha^\lambda} + w_{31\alpha^\lambda}(v))^2 + 2w_{3*\alpha^\lambda}(w_{30\alpha^\lambda} +$$
$$+ w_{31\alpha^\lambda}(v))]/2 + \beta_2[T^{\lambda\mu}(v) w_{3\alpha^\lambda}(v)]_{\alpha^\mu} + \beta_2 R^3\}/(k^2\mu_1); \tag{59}$$
$$f_{01}(v) = [\psi_{21\alpha^1}(v) - \psi_{11\alpha^2}(v) + if_{31}(v)]/2, \quad f_{02}(v) = [\psi_{20\alpha^1} - \psi_{10\alpha^2} + if_{32}(v)]/2;$$
$$l_{31}(v) = Re[itTf_{01}(v)], \quad l_{32}(v) = \varphi(v) + Re[itTf_{02}(v)].$$

Введем операторы

$$Kv = \Phi[l_{31}(v)] + Tf_{01}(v), \quad Gv = \Phi[l_{32}(v)] + Tf_{02}(v). \tag{60}$$

Тогда уравнение (57) примет вид:

$$v - Kv - Gv = 0. \tag{61}$$

Исследуем разрешимость уравнения (61) в пространстве $W_p^{(1)}(\Omega), p > 2$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a), (b) раздела 1. Тогда 1) K - линейный вполне непрерывный оператор в $W_p^{(1)}(\Omega),\ p > 2$; 2) G -нелинейный ограниченный* *оператор в* $W_p^{(1)}(\Omega),\ 2 < p < 2/(1-\beta)$, *причем для любых* $v^j(j=1,2) \in W_p^{(1)}(\Omega)$, *принадлежащих шару* $\|v\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} < r$, *имеет место оценка*

$$\|Gv^1 - Gv^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \le c[q_0 + (1 + \|w_3(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + r)(\|w_3(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + r)]\|v^1 - v^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)},$$

где $q_0 = \sum_{\lambda,\mu=1}^2 \|T^{\lambda\mu}(0)\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{\lambda=1}^2 \|k_{2+\lambda} w_{3\alpha^\lambda}(0) + R^\lambda\|_{L_p(\Omega)}$, $T^{\lambda\mu}(0) \equiv T^{\lambda\mu}(a(0))$, $a(0) = (w_1(0), w_2(0), w_3(0), \psi_1(0), \psi_2(0))$; *здесь и далее* $w_j(0)(j = \overline{1,3})$, $w_{3\alpha^\lambda}(0), \psi_\lambda(0)(\lambda = 1,2)$ *определены по формулам (44), (40), (39), (38) при* $v = 0$.

Справедливость первой части леммы следует из соотношений (59), (60) с учетом лемм 1,2 , свойств операторов T, S, S_Γ. Вторая часть леммы доказывается с использованием (40), (41), (43), (45),(51),(58) и леммы 1.

Рассмотрим однородное уравнение

$$v - Kv = 0 \tag{62}$$

и пусть $v \in W_p^{(1)}(\Omega),\ 2 < p < 2/(1-\beta)$ - ненулевое его решение. Этому решению по формулам в (38), (41), (45) соответствуют обобщенные перемещения $w_{j1}(v)(j = \overline{1,3})$, $\psi_{j1}(v)(j=1,2)$, которые удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}
w_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2} - k_3 w_{3\alpha^1} = 0,\\
\mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1} + w_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2} - k_4 w_{3\alpha^2} = 0,\\
k^2\mu_1(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} + \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + k_3 w_{1\alpha^1} + k_4 w_{2\alpha^2} - k_5 w_3 = 0,\\
\psi_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 \psi_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 \psi_{2\alpha^1\alpha^2} - k_0(w_{3\alpha^1} + \psi_1) = 0,\\
\mu_1 \psi_{2\alpha^1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 \psi_{1\alpha^1\alpha^2} - k_0(w_{3\alpha^2} + \psi_2) = 0
\end{gathered} \tag{63}$$

и однородным статическим граничным условиям вида

$$\begin{gathered}
(w_{1\alpha^1} + \mu w_{2\alpha^2} - k_3 w_3) d\alpha^2/ds - \mu_1(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) d\alpha^1/ds = 0,\\
\mu_1(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) d\alpha^2/ds - (\mu w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2} - k_4 w_3) d\alpha^1/ds = 0,\\
(w_{3\alpha^1} + \psi_1) d\alpha^2/ds - (w_{3\alpha^2} + \psi_2) d\alpha^1/ds = 0,\\
(\psi_{1\alpha^1} + \mu \psi_{2\alpha^2}) d\alpha^2/ds - \mu_1(\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}) d\alpha^1/ds = 0,\\
\mu_1(\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}) d\alpha^2/ds - (\mu \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) d\alpha^1/ds = 0.
\end{gathered} \tag{64}$$

Равенства в (63) с $w_j = w_{j1}(j = \overline{1,3}$, $\psi_j = \psi_{j1}(j=1,2)$ соответственно умножим на $w_{11}, w_{21}, w_{31}, \psi_{11}, \psi_{21}$, интегрируем по области Ω и сложим. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (64), после несложных преобразований получим $v_j = 0, j = 1,2$, т.е. $v = 0$ в $\overline{\Omega}$. Итак, уравнение (62) имеет только тривиальное решение в $W_p^{(1)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I-K)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(1)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, с помощью которого уравнение (61) сведется к эквивалентному

$$v - G_* v = 0, \quad G_* v = (I-K)^{-1} G v. \tag{65}$$

Из вышеустановленных свойств оператора G следует, что G_*- нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(1)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, причем для любых $v^j(j =$

$1,2) \in W_p^{(1)}(\Omega)$, принадлежащих шару $||v||_{W_p^{(1)}} < r$, в силу леммы 3 справедлива оценка

$$\|G_* v^1 - G_* v^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \le q_* \|v^1 - v^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)},$$

где $q_* = c\|(I-K)^{-1}\|_{W_p^{(1)}(\Omega)}[q_0 + (1+\|w_3(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + r)(\|w_3(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + r)]$.

Предположим, что радиус r шара, жесткие смещения и внешние силы, действующие на оболочку, таковы, что выполняются условия

$$q_* < 1, \quad \|G_*(0)\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} < (1-q_*)r, \tag{66}$$

где $G_*(0)$ зависит от компонент внешних сил и жестких смещений оболочки.

В этих условиях к уравнению (65) можно применить принцип сжатых отображений [3, с.146], согласно которому уравнение (65) в шаре $||v||_{W_p^{(1)}} < r$ при фиксированном жестком смещении w_{3*} имеет единственное решение $v \in W_p^{(1)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$, которое можно представить в виде $v = \mathfrak{R}G_*(0)$, где $\mathfrak{R}$- резольвента оператора $G_*v - G_*(0)$.

Зная $v = \mathfrak{R}G_*(0)$, по формулам (38), (40), (44) находим обобщенные перемещения $w_j(j=\overline{1,3}), \psi_j(j=1,2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$. В результате получаем обобщенное решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ задачи (1), (2), которое, как легко видеть, можно представить в виде

$$a = a_0 + a_*, \tag{67}$$

где $a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*})$- вектор жестких смещений оболочки как абсолютно твердого тела, определенных формулами (41), (42), (47); a_0-вектор с компонентами $w_{j1}(v) + w_{j2}(v)(j=1,2)$, $w_{30} + w_{31}(v)$, $\psi_{j0} + \psi_{j1}(v)(j=1,2)$, найденными по формулам (38), (41), (45) при $v = \mathfrak{R}G_*(0)$. Отметим, что вектор a_0 однозначно определяется исходными данными задачи и жестким смещением w_{3*}.

Таким образом, на основании (67) заключаем, что задача (1), (2) имеет обобщенное решение с точностью до жестких смещений оболочки как абсолютно твердого тела.

Теперь решение $v = v_2 + iv_1 = \mathfrak{R}G_*(0)$ уравнения (65) внесем в (35). Тогда легко убеждаемся в том, что третье условие в (35) выполняется тождественно, а первые два условия в (35) могут быть преобразованы к виду

$$\int_\Gamma \{N^j + (-1)^{j-1}[k_2(\alpha^2)^2 - k_1(\alpha^1)^2]P^j/2 - k_{3-j}\alpha^1\alpha^2 P^{3-j} - \alpha^j P^3\}ds +$$
$$+ \int_\Omega\int \{L^j + (-1)^{j-1}[k_2(\alpha^2)^2 - k_1(\alpha^1)^2]R^j/2 - k_{3-j}\alpha^1\alpha^2 R^{3-j} - \alpha^j R^3\}d\alpha^1 d\alpha^2 +$$
$$+ \int_\Gamma P^j \mathfrak{F} ds + \int_\Omega\int R^j \mathfrak{F} d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \ j=1,2, \tag{68}$$

где $\mathfrak{F}$ -известная функция, имеющая вид: $\mathfrak{F} = w_{30} + w_{31}(v) + w_{3*}$; здесь $v = \mathfrak{R}G_*(0)$ и w_{30}, $w_{31}(v)$, w_{3*} определены формулами (41). Отметим, что $\mathfrak{F}$ зависит только от внешних сил и жестких смещений w_{3*}.

Отметим, что в случае линейных задач последние два слагаемых в (68) отсутствуют.

Заметим, что условия (31),(56), (68) являются не только достаточными, но и необходимыми условиями разрешимости задачи (1), (2).

Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c) раздела 1, неравенства (66). Тогда для разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих упругих оболочек типа Тимошенко со свободными краями необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (31), (56), (68). В случае их выполнения задача имеет обобщенное решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^2(\Omega),\ 2 < p < 2/(1-\beta)$ *вида (67) с точностью до жестких смещений* a_* *оболочки как абсолютно твердого тела.*

Summary

S.N. Timergaliev. About one approach to investigation of solvability of nonlinear problems for shallow shells Timoshenko types with free edges.

The solvability of geometrically nonlinear boundary problems for shallow isotropic elastic shells within the framework of S.P. Timoshenko shift model with static edge conditions is investigated. The method of study based on reducing of the equilibrium equations reference system to one nonlinear equation relative to cross shift deformation. In this case the significant role integral ideas for the tangential shifts and the angle of rotations which are formulated with the attraction of the general solutions of the nonhomogeneous equation of Cauchy-Riemann, play.

Key words: Timoshenko type shell, equilibrium equations, boundary problem, generalized shifts, generalized problem solution, integral images, integral equations, holomorphic functions, existence theorem

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Наука, 1988. – 510 с.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – Москва: Физматгиз, 1963. – 640 с.

3. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Тимергалиев, Самат Низаметдинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики Набережночелнинского института К(П)ФУ

E-mail: *samat_tim@mail.ru*